量子 Büchi 自动机的代数及逻辑刻画

韩召伟
(陕西师范大学数学与信息科学学院,陕西西安 710062)

摘　要: 提出量子 Büchi 自动机(简记为 LVBA)的概念,利用量子状态构造方法证明了一般 LVBA 与状态转移为经典函数的 LVSBA 间的相互等价性,籍此研究了量子无穷正则语言的代数刻画、层次刻画和 Büchi 刻画以及对于正则运算的封闭性;通过引入单体二阶量子逻辑(简记为 LVMSO)的概念,给出量子 Büchi 自动机所识别无穷语言的单体二阶逻辑描述,深化和推广了量子逻辑意义下的 Büchi 基本定理.

关键词: 量子逻辑; 量子 Büchi 自动机; 量子无穷正则语言; 代数刻画; 单体二阶量子逻辑; Büchi 定理

中图分类号: TP301.1; O153.1　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 0372-2112 (2013) 06-1093-08

电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn　　**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.06.009

Algebraic and Logical Characterizations of Quantum Büchi Automata

HAN Zhao-wei
(*College of Mathematics and Information Science*, *Shaanxi Normal University*, *Xi'an*, *Shaanxi* 710062, *China*)

Abstract: The notion of quantum Büchi automaton (LVBA for short) is introduced, by means of quantum state construction, the equivalence of an LVBA and an LVSBA with crisp transition function is proved, based on this, the algebraic and level characterizations and also the Büchi characterization of quantum infinite regular languages are investigated, and also the closed properties of those quantum infinite regular languages under some regular operations are dealt with. By providing the concept of monadic second-order quantum logic (LVMSO in short), the monadic second-order logic characterizations of infinite regular languages recognized by quantum Büchi automata are presented, which deepen and generalize the fundamental Büchi theorem to quantum setting.

Key words: quantum logic; quantum Büchi automaton; quantum infinite regular language; algebraic characterization; monadic second-order quantum logic; Büchi theorem

1　引言

量子计算的思想源于物理与计算之间的联系[1,2].自从 Shor 于 1994 年发现了在量子计算机上进行大数分解的多项式时间算法;Grover 于 1996 年发展了平方根时间的量子搜索算法,量子计算日益受到人们的关注和重视[3~6],而量子计算模型作为其中关键的科学问题之一.伴随着量子计算的快速发展,量子算法相对于传统算法具有不可比拟的优势,在传统经典计算中可能需要指数时间,而在量子算法的支持下只需要多项式时间,传统的经典计算理论已经不适用于量子系统.由应明生等[7~11]建立的基于量子逻辑的有穷自动机理论是量子计算模型方面一个重要研究方向,目前已有很多量子逻辑框架下独有的、本质的结果.特别是,应明生证明了不同于经典有穷自动机理论,量子逻辑框架下有穷自动机的许多重要定理一般不成立,而当添加正交模格子集的交换子条件后,这些定理才能成立,即对应定理的完全成立依赖于正交模格的分配律,从而结论又还原到 Boolean 逻辑或经典逻辑情形.

然而基于 Büchi 自动机的模型检测作为近二十年来比较成功的形式化自动验证技术之一[12,13].由于一方面,经典 Büchi 自动机理论[14~18]是建立在 Boolean 逻辑理论之上,而此逻辑满足分配律本身是比较完备的,此条件要求比较强,而在量子力学中 Hilbert 空间的所有闭子空间以及投影本身可能不满足分配律,而是满足相对较弱的正交模律;另一方面,经典计算理论从复杂性角度来说没有质的飞跃,随着问题的深化可能复杂性(时间、空间)呈现指数级增长,从而有些算法不是有效的,考虑到量子算法具有的优越性,因此进一步研究量子逻辑框架下的 Büchi 自动机理论和代数刻画,对于丰

收稿日期:2010-12-23;修回日期:2013-01-08
基金项目:国家自然科学基金(No.11271237);国家自然科学基金数学天元专项基金(No.11226266);陕西师范大学科研启动基金(No.999553)

富、发展和完善量子环境下的计算理论和模型检测理论具有非常重要的现实意义.本文旨在利用语义分析方法,建立量子逻辑框架下的 Büchi 自动机理论,将量子计算理论丰富和深化,完善量子 Büchi 自动机理论的逻辑描述问题,揭示该计算模型的逻辑基础,得到比较完整的结果,以期进一步为量子模型检测提供可靠的形式理论和逻辑基础.

2 量子 Büchi 自动机的定义及性质

量子逻辑是指真值为完备正交模格 ℓ 的逻辑,亦称为正交模格值逻辑,见文献[7~11,19].完备的正交模格是七元组 $\ell=(L,\leqslant,\wedge,\vee,\perp,0,1)$,其中:$\ell=(L,\leqslant,\wedge,\vee,0,1)$是完备格;0 和 1 分别是最小元与最大元;$\leqslant$是偏序;对 $X\subseteq L$,$\wedge X$ 与 $\vee X$ 分别表示 X 的最大下界与最小上界;一元运算$\perp$是 L 上的正交补,满足:对任意 $a,b\in L$,$a\wedge a^{\perp}=0$,$a\vee a^{\perp}=1$;$a^{\perp\perp}=a$;$a\leqslant b$ 蕴涵 $b^{\perp}\leqslant a^{\perp}$.同时,$\ell$ 满足正交模律:$a\leqslant b$ 蕴涵 $a\vee(a^{\perp}\wedge b)=b$.在 ℓ 上定义蕴含算子$\rightarrow$:$L\times L\rightarrow L$ 满足:$a,b\in L$,$a\leqslant b$ 当且仅当 $a\rightarrow b=1$.本文假设$\rightarrow$为 Sasaki 蕴涵,即 $a\rightarrow b=a^{\perp}\vee(a\wedge b)$.双蕴涵$\leftrightarrow$定义为:对任意 $a,b\in L$,$a\leftrightarrow b\overset{\text{def}}{=}(a\rightarrow b)\wedge(b\rightarrow a)$.正交模格值逻辑的语法与经典的一阶逻辑类似.$\neg$,$\vee$,$\rightarrow$是 3 个原始连接词,$\exists$ 是原始量词,$\wedge$,$\leftrightarrow$以及 $\forall$ 由$\neg$,$\vee$,$\rightarrow$和$\exists$定义.语义方面,将$\neg$,$\vee$和$\rightarrow$分别解释为$\perp$,$\vee$和$\rightarrow$;$\exists$解释为 ℓ 中的最小上界,集合论公式 $x\in A$ 的真值是$\lceil x\in A\rceil=A(x)$;公式 φ 是有效的当且仅当$\lceil\varphi\rceil=1$,并记为$\models^{\ell}\varphi$.对 ℓ 的有限子集 X,定义 X 交换子(commutator)$\gamma(X)$如下:$\gamma(X)=\vee\{\wedge_{a\in X}a^{f(a)}:f:X\rightarrow\{1,-1\}$为映射$\}$,其中 $a^{1}=a$,$a^{-1}=a^{\perp}$.

定义集合 $\Sigma^{\omega}=\{\alpha:\alpha:\omega\longrightarrow\Sigma\}$,其中 α 是一个从自然数集 $\omega=\{0,1,2,\cdots\}$ 到 Σ 的映射,通常记为 $\alpha(0)\alpha(1)\alpha(2)\cdots\alpha(n)\alpha(n+1)\cdots$,称 Σ^{ω} 中的元素α 为无穷(长度)字符串或无穷输入串或无穷词,一般用字母 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$来表示.

定义 1 量子(非确定型)Büchi 自动机(简记为 LVBA)是五元组 $A^{\omega}=(Q,\Sigma,\delta,I,F)$,其中 Q,Σ 都是非空有限集,分别表示有限状态集和有限输入符号集,$I,F:Q\longrightarrow\ell$,即 Q 的 ℓ 值子集,分别表示初始状态和终状态,而 $\delta:Q\times\Sigma\times Q\longrightarrow\ell$ 为状态转移函数.

如下命题:

“q 为初始状态”记为“$q\in I$”;

“q 为终状态”记为“$q\in F$”;

“输入 σ 使状态 q 转移到 p”记为“$(q,\sigma,p)\in\delta$”.

这些命题的真值分别为 $I(q)$,$F(q)$,$\delta(q,\sigma,p)$.

以下记描述 LVBA A^{ω} 所识别(接受)的逻辑语言的原子命题全体之集为 atom(A^{ω}),即

$$\text{atom}(A^{\omega})=\{“q\in I”:q\in Q\}\cup\{“q\in F”:q\in Q\}\cup\{“(q,\sigma,p)\in\delta”:p,q\in Q,\sigma\in\Sigma\}.$$

注 1 首先,定义 1 中量子 Büchi 自动机与文[14~18]中经典 Büchi 自动机定义不同之处在于:本文初始状态之集 I 为 ℓ 值有限子集,即量子子集;状态转移函数为正交模格 ℓ 中的格值,此定义能够确保 LVBA 能够接受一定真值程度的无穷字符串(在给定的量子逻辑中),从而能够识别量子语言;经典 Büchi 自动机可认为本文中的一种特殊情况,只需限定 $\ell=\{0,1\}$,即 Boolean 代数,即为经典 Büchi 自动机,从而本定义可认为是经典二值逻辑下 Büchi 自动机理论的推广.

注 2 由定义 1 可知,LVBA 本身为 ℓ 值有穷自动机,为了区分起见,此时记为 $A=(Q,\Sigma,\delta,I,F)$,类似文献[9]可定义 Σ^{*} 上的 ℓ 值(一元)有穷可识别谓词 $\text{rec}_A\in\ell(\Sigma^{*})$如下:对任意 $w=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n\in\Sigma^{*}$,$\text{rec}_A\overset{\text{def}}{=}(\exists q_0\in Q)\cdots(\exists q_n\in Q).(q_0\in I\wedge(q_0,\sigma_1,q_1)\in\delta\wedge\cdots\wedge(q_{n-1},\sigma_n,q_n)\in\delta\wedge q_n\in F)$,其中 $\ell(\Sigma^{*})$表示 Σ^{*} 上的所有 ℓ 值语言之集.命题 $\text{rec}_A(w)$的真值定义为 $\lceil\text{rec}_A(w)\rceil=\vee\{I(q_0)\wedge\delta(q_0,\sigma_1,q_1)\wedge\cdots\wedge\delta(q_{n-1},\sigma_n,q_n)\wedge F(q_n):q_0,\cdots,q_n\in Q\}$.$\text{rec}_A$ 称为 ℓ 值有穷自动机 A 识别(接受)的 Σ 上的量子语言,亦称为 Σ 上的量子正则语言.为讨论方便起见,记 Σ 上的量子正则语言的全体为 $\ell R(\Sigma)$,详见文献[9].

定义 2 量子(简单非确定型)Büchi 自动机(简记为 LVSBA)是五元组 $A^{\omega}=(Q,\Sigma,\delta,I,F)$,其中 Q,Σ 都是非空有限集,分别表示有限状态集和有限输入符号集,$I\subseteq Q$,表示分明初始状态,而 $\delta:Q\times\Sigma\longrightarrow 2^{Q}$ 表示分明状态转移函数,$F:Q\longrightarrow\ell$,即 Q 的 ℓ 值子集,表示终状态.

设 A^{ω} 是一个 LVBA,令 $T(Q,\Sigma)=(Q\times\Sigma\times Q)^{\omega}$,对任意 $\alpha=\alpha(0)\alpha(1)\alpha(2)\cdots\alpha(n)\alpha(n+1)\cdots\in\Sigma^{\omega}$,定义 A^{ω} 在输入 α 下的路径为 $\rho_\alpha=\rho(0)\rho(1)\rho(2)\cdots\in T(Q,\Sigma)$,其中 $\rho(i)=(q_i,\alpha(i),q_{i+1})\in\delta$,$i\geqslant 0$,在不引起混淆的情况下,路径 ρ_α 有时也简记为 ρ.另外引入下列记号,用 $b(\rho)$表示路径 ρ 中出现的第一个状态 q_0,即 $b(\rho)=q_0$;然而,有时 α 亦称为路径 ρ 的标记,即 $\text{lb}(\rho)=\alpha$;用 R 表示 A^{ω} 在输入 α 下路径的全体,即 $R=\{\rho:\text{lb}(\rho)=\alpha\}\subseteq T(Q,\Sigma)$;用 $\exists^{\omega}n$ 表示量词“存在无穷多个 n”;用 $\text{In}(\rho)$表示路径 ρ 上出现无穷多次的状态之集,即 $\text{In}(\rho)=\{q\in Q:\exists^{\omega}n\in\omega.\rho(n)=(q,\alpha(n),q_{n+1})\}$.路径 ρ 称为有效的,若满足:$\text{In}(\rho)$至少含有 $\text{supp}(F)=\{q:q\in Q.F(q)>0\}$中的一个终状态,即 $\text{In}(\rho)\cap\text{supp}(F)\neq\varnothing$.以下为了叙述方便用 $\Lambda^{\omega}(\Sigma)$记输入集 Σ 上全体 LVBA 之集.

定义 3　设 $A^\omega \in \Lambda^\omega(\Sigma)$,定义 $T(Q,\Sigma)$上 ℓ 值(一元)路径谓词 $\mathrm{path}_A^\omega \in \ell(T(Q,\Sigma))$(即从 $T(Q,\Sigma)$到 ℓ 的映射)为,对任意 $\rho=\rho(0)\rho(1)\rho(2)\cdots \in T(Q,\Sigma)$,

$$\mathrm{path}_A^\omega(\rho) \overset{\text{def}}{=} \wedge_{i\geqslant 0}[(q_i,\alpha(i),q_{i+1})\in\delta].$$

即命题 $\mathrm{path}_A^\omega(\rho)$的真值定义为,

$$\ulcorner \mathrm{path}_A^\omega(\rho)\urcorner \overset{\text{def}}{=} \wedge_{i\geqslant 0}\delta(q_i,\alpha(i),q_{i+1}).$$

定义 4　设 $A^\omega \in \Lambda^\omega(\Sigma)$,定义 Σ^ω 上 ℓ 值(一元)可识别谓词 $\mathrm{rec}_A^\omega \in \ell(\Sigma^\omega)$(即从 Σ^ω 到 ℓ 的映射)为,对任意 $\alpha=\alpha(0)\alpha(1)\alpha(2)\cdots\in\Sigma^\omega$,$\mathrm{rec}_A^\omega(\alpha)\overset{\text{def}}{=}(\exists \rho\in R)(\exists q\in Q).(b(\rho)\in I\wedge \mathrm{lb}(\rho)=\alpha\wedge \mathrm{path}_A^\omega(\rho)\wedge q\in \mathrm{In}(\rho)\wedge q\in F)$. 即命题 $\mathrm{rec}_A^\omega(\alpha)$的真值定义为,

$$\ulcorner \mathrm{rec}_A^\omega(\alpha)\urcorner = \vee\{I(b(\rho))\wedge \ulcorner \mathrm{path}_A^\omega(\rho)\urcorner \wedge \wedge_{q\in \mathrm{In}(\rho)\cap \mathrm{supp}(F)}F(q):\ \rho\in R,\mathrm{lb}(\rho)=\alpha,\mathrm{In}(\rho)\cap\mathrm{supp}(F)\neq\varnothing\}.$$

此时,称 rec_A^ω 为量子 Büchi 自动机 A^ω 识别(接受)的 Σ 上的 ℓ 值 ω-语言(无穷语言). 用 $\ell(\Sigma^\omega)$表示 Σ^ω 上的所有 ℓ 值 ω-语言(无穷语言)之集,也称为 Σ 上的量子 ω-正则语言(无穷正则语言). 为叙述方便,记 Σ 上的量子 ω-正则语言(无穷正则语言)的全体为 $\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$.

当两 LVBA $A^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,F)$和 $A_1^\omega=(Q_1,\Sigma,\delta_1,I_1,F_1)$识别(接受)相同的量子 ω-正则语言时,即对任意 $\alpha\in\Sigma^\omega$,$\ulcorner \mathrm{rec}_A^\omega(\alpha)\urcorner=\ulcorner f_{A_1}^\omega(\alpha)\urcorner$,称 A^ω 和 A_1^ω 相互等价,记为 $A^\omega\equiv A_1^\omega$.

注 3　由定义 3 和定义 4 以及 $\mathrm{In}(\rho)$的定义可知,对任意 $\alpha=\alpha(0)\alpha(1)\alpha(2)\cdots\in\Sigma^\omega$,$\ulcorner \mathrm{rec}_A^\omega(\alpha)\urcorner \overset{\text{def}}{=} \vee\{I(q_0)\wedge \wedge_{i\geqslant 0}\delta(q_i,\alpha(i),q_{i+1})\wedge \wedge_{j\in J}F(q_j): q_i,q_j\in Q, i\in\omega, j\in J, J\subseteq \omega$ 且 $|J|=\omega\}$.

首先说明,对于经典 Büchi 自动机成立的某些结论,由于 Boolean 代数本身具有分配律,而量子逻辑本身缺少分配律但满足相对较弱的正交模律,因此在量子逻辑框架下一般不再成立.

设 $A_1^\omega=(Q_1,\Sigma,\delta_1,I_1,F_1)$和 $A_2^\omega=(Q_2,\Sigma,\delta_2,I_2,F_2)$是任意两个 LVBA,构造乘积自动机如下:

$A_1^\omega\times A_2^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,F)$,其中 $Q=Q_1\times Q_2$,$I=I_1\times I_2$,$F=F_1\times F_2$,而 $\delta: Q\times\Sigma\times Q\longrightarrow \ell$ 定义为,对任意 $(p_1,p_2),(q_1,q_2)\in Q$,$\sigma\in\Sigma$,都有

$$\delta((p_1,p_2),\sigma,(q_1,q_2))=\delta(p_1,\sigma,q_1)\wedge\delta(p_2,\sigma,q_2).$$

命题 1　若 $A_1^\omega=(Q_1,\Sigma,\delta_1,I_1,F_1)$和 $A_2^\omega=(Q_2,\Sigma,\delta_2,I_2,F_2)$是任意两个 LVBA,以下结论成立:

(1) 对任意 $\alpha\in\Sigma^\omega$,总有 $\models^\ell \gamma(\mathrm{atom}(A_1^\omega)\cup \mathrm{atom}(A_2^\omega))\rightarrow(\mathrm{rec}_{A_1}^\omega(\alpha)\wedge \mathrm{rec}_{A_2}^\omega(\alpha)\leftrightarrow \mathrm{rec}_{A_1\times A_2}^\omega(\alpha))$.

(2) 如下条件等价:

(Ⅰ)ℓ 为 Boolean 代数;(Ⅱ)对任意 $\alpha\in\Sigma^\omega$,恒有 $\models^\ell \mathrm{rec}_{A_1}^\omega(\alpha)\wedge \mathrm{rec}_{A_2}^\omega(\alpha)\leftrightarrow \mathrm{rec}_{A_1\times A_2}^\omega(\alpha)$.

证明:(1)类似文[7]Proposition 6.5,易证结论成立.

(2)(Ⅰ)⇒(Ⅱ)显然;

(Ⅱ)⇒(Ⅰ),只需证明对任意 $a,b,c\in\ell$,都有 $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$成立.

对任意 $a,b,c\in\ell$,构造 LVBA 如下:

$A_1^\omega=(Q_1,\Sigma,\delta_1,I_1,F_1)$和 $A_2^\omega=(Q_2,\Sigma,\delta_2,I_2,F_2)$,其中 $Q_1=I_1=\{p\}$,$\Sigma=\{\sigma\}$,$F_1=\{p\}$,$\delta_1(p,\sigma,p)=a$,而 $Q_2=\{q,r,s\}$,$I_2=\{q\}$,$F_2=\{r,s\}$,$\delta_2(q,\sigma,r)=b$,$\delta_2(q,\sigma,s)=c$,$\delta_2(r,\sigma,r)=1$,$\delta_2(s,\sigma,s)=1$. 易证 $\ulcorner \mathrm{rec}_{A_1}^\omega(\sigma^\omega)\urcorner=a$,$\ulcorner \mathrm{rec}_{A_2}^\omega(\sigma^\omega)\urcorner=b\vee c$,而$\ulcorner \mathrm{rec}_{A_1\times A_2}^\omega(\sigma^\omega)\urcorner=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$,由(Ⅱ)可知,分配律成立.

设 $A^\omega=(Q_1,\Sigma,\delta_1,I_1,F_1)$是任一 LVBA,对任意 $r\in\ell$,构造 LVBA 如下:$rA^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,F)$,其中 $Q=Q_1$,$F=F_1$,$\delta=\delta_1$,$I=r\wedge I_1$,即对任意 $q\in Q$,$I(q)=r\wedge I_1(q)$.

命题 2　若 $A^\omega=(Q_1,\Sigma,\delta_1,I_1,F_1)$是任一 LVBA,则对任意 $r\in\ell$,以下结论成立:

(1) 对任意 $\alpha\in\Sigma^\omega$,总有

$\models^\ell \gamma(\mathrm{atom}(A^\omega)\cup\mathrm{atom}(\{r\}))\rightarrow(r\wedge \mathrm{rec}_A^\omega(\alpha)\leftrightarrow \mathrm{rec}_{rA}^\omega(\alpha))$.

(2) 如下条件等价:

(Ⅰ)ℓ 为 Boolean 代数;(Ⅱ)对任意 $\alpha\in\Sigma^\omega$,恒有 $\models^\ell r\wedge \mathrm{rec}_A^\omega(\alpha)\leftrightarrow \mathrm{rec}_{rA}^\omega(\alpha)$.

证明:(1) 类似文献[7]Proposition 6.5,易证结论成立.

(2)(Ⅰ)⇒(Ⅱ)显然;

(Ⅱ)⇒(Ⅰ),只需证明对任意 $a,b,c\in\ell$,都有 $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$成立.

对任意 $a,b,c\in\ell$,构造 LVBA 如下:

$A^\omega=(Q_1,\Sigma,\delta_1,I_1,F_1)$,其中 $Q_1=\{p,q,s\}$,$\Sigma=\{\sigma\}$,$I_1=\{p\}$, $F_1=\{q,s\}$,$\delta_1(p,\sigma,q)=b$,$\delta_1(q,\sigma,q)=1$,$\delta_1(p,\sigma,s)=c$,$\delta(s,\sigma,s)=1$.

易证$\ulcorner \mathrm{rec}_A^\omega(\sigma^\omega)\urcorner=b\vee c$,而$\ulcorner \mathrm{rec}_{aA}^\omega(\sigma^\omega)\urcorner=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$,由(Ⅱ)可知,$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$成立.

注 4　命题 1 和命题 2 说明了量子 ω-正则语言对于交运算和数量积运算一般不封闭,而若加入交换子的条件(即保证了局部分配律成立),这些结论依然是成立的,实际上还可类似说明量子 ω-正则语言对于补运算、柯西连接运算、同态和 ω-Kleene 闭包运算(具体运算的定义见后文)是否封闭,必须取决于分配律是否成立.但值得庆幸的是,以上运算取决于分配律不是本质的性质,而是传统的子集构造方法在量子逻辑框架下不再适用,因此有必要进一步提出新的构造技术,以及深化和研究量子 ω-正则语言的代数刻画,从而保证

以上性质在量子逻辑框架下依然成立.

为了引入量子状态构造方法,以下说明量子 Büchi 自动机(LVBA)识别(或接受)的量子 ω-正则语言的像集总是有限的.

引理 1[20] 设 l 为格,X 为 l 的有限子集,则由 X 生成的交 $\wedge$-半格与并 $\vee$-半格(记为 $X_\wedge$ 和 $X_\vee$)都是有限的,且 $X_\wedge=\{x_1\wedge\cdots\wedge x_k: k\geqslant 1, x_1,\cdots,x_k\in X\}\cup\{1\}$,$X_\vee=\{x_1\vee\cdots\vee x_k: k\geqslant 1, x_1,\cdots,x_k\in X\}\cup\{0\}$.

命题 3 对任一 LVBA $A^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,F)$,$A^\omega$ 能识别的量子ω-正则语言 rec_A^ω 作为从 Σ^ω 到 ℓ 的函数,其像集 $\mathrm{Im}(\mathrm{rec}_A^\omega)=\{r\in\ell: \exists\,\alpha\in\Sigma^\omega.\ulcorner\mathrm{rec}_A^\omega(\alpha)\urcorner=r\}$是 ℓ 的有限子集.

证明:类似文献[11]同理可证.

3 量子 Büchi 自动机的代数刻画

命题 4 设 $A^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,F)$是任一 LVBA,则存在 LVSBA $A_1^\omega=(Q_1,\Sigma,\eta,S,E)$,使得 $A^\omega\equiv A_1^\omega$,即对任意 $\alpha\in\Sigma^\omega$,$\models^\ell\mathrm{rec}_A^\omega(\alpha)\leftrightarrow\mathrm{rec}_{A_1}^\omega(\alpha)$.

证明:对于给定的 LVBA $A^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,F)$,构造 LVSBA $A_1^\omega=(Q_1,\Sigma,\eta,S,E)$如下:

令 $Q_1=Q\times(l_1-\{0\})$,其中 $l_1=(X_\wedge)_\vee$,而 $X=\mathrm{Im}(I)\cup\mathrm{Im}(\delta)$.由引理 1 可知,$l_1$ 必然是 ℓ 的有限子集,令 $S=\{(q,a): q\in Q$ 且 $I(q)=a\}$,可知 $S\subseteq Q_1$ 且有限.

对任意$(q,a)\in Q_1$,$\sigma\in\Sigma$,$\eta: Q_1\times\Sigma\longrightarrow 2^{Q_1}$,定义为 $\eta((q,a),\sigma)=\{(p,b):\delta(q,\sigma,p)\wedge a=b\neq 0, p\in Q, b\in\ell\}$.而对任意 $P\in 2^{Q_1}$,定义 $\eta(P,\sigma)=\cup\{\eta((q,a),\sigma):(q,a)\in P\}$.由 l_1 的取法,易知 η 是良定义的.

终状态 $E: Q_1\longrightarrow\ell$ 定义为,对任意$(q,a)\in Q_1$,$E((q,a))=a\wedge F(q)$.

对任意 $j\in\omega$,若令 $\alpha(0,j)=\alpha(0)\alpha(1)\cdots\alpha(j-1)$,利用数学归纳法对 $\alpha(0,j)$的长度$|\alpha(0,j)|$归纳证明易知如下论断成立,$\eta^*(S,\alpha(0,j))=\{(q_j,r_j): q_j\in Q$ 且 $r_j=I(q_0)\wedge\delta(q_0,\alpha(0),q_1)\wedge\cdots\wedge\delta(q_{j-1},\alpha(j-1),q_j)\neq 0\}$.

由定义 2 和注 3 以及 LVSBA A_1^ω 的定义可知,

$\ulcorner\mathrm{rec}_{A_1}^\omega(\alpha)\urcorner=\vee\{\wedge_{j\in J}E((q_j,r_j)): J\subseteq\omega, |J|=\omega, j\in J, \rho_1=t_0t_1t_2\cdots, t_j=((q_j,r_j),\alpha(j),(q_{j+1},r_{j+1}))\in\eta, q_j\in Q\}=\vee\{\wedge_{j\in J}I(q_0)\wedge\wedge_{i=0}^{j-1}\delta(q_i,\alpha(i),q_{i+1})\wedge F(q_j): J\subseteq\omega, |J|=\omega, j\in J, \rho_1=t_0t_1t_2\cdots, t_j=((q_j,r_j),\alpha(j),(q_{j+1},r_{j+1}))\in\eta, q_j\in Q\}=\vee\{I(q_0)\wedge\wedge_{j\in J}\wedge_{i=0}^{j-1}\delta(q_i,\alpha(i),q_{i+1})\wedge\wedge_{j\in J}F(q_j): J\subseteq\omega, |J|=\omega, j\in J, \rho_1=t_0t_1t_2\cdots, t_j=((q_j,r_j),\alpha(j),(q_{j+1},r_{j+1}))\in\eta, q_j\in Q\}=\vee\{I(q_0)\wedge\wedge_{i\geqslant 0}\delta(q_i,\alpha(i),q_{i+1})\wedge\wedge_{j\in J}F(q_j): J\subseteq\omega, |J|=\omega, j\in J, \rho=s_0s_1s_2\cdots, s_i=(q_i,\alpha(i),q_{i+1})\in\delta, q_i\in Q\}=\ulcorner\mathrm{rec}_A^\omega(\alpha)\urcorner$,由以上分析可知,$\mathrm{rec}_A^\omega=\mathrm{rec}_{A_1}^\omega$,即 $A^\omega\equiv A_1^\omega$.

注 5 命题 4 中涉及到的构造方法称为量子状态构造方法,利用此方法可将任意 LVBA A^ω 转化为与其等价的 LVSBA A_1^ω,使得初始状态和状态转移函数是分明的,此时一元可识别谓词$\ulcorner\mathrm{rec}_A^\omega(\alpha)\urcorner$可简化为$\ulcorner\mathrm{rec}_{A_1}^\omega(\alpha)\urcorner=\vee\{\wedge_{q\in\mathrm{In}(\rho_1)\cap\mathrm{supp}(E)}E((q,r)):\rho_1\in R_1, \mathrm{lb}(\rho_1)=\alpha, \mathrm{In}(\rho_1)\cap\mathrm{supp}(E)\neq\varnothing\}$,这就表明,量子 Büchi 自动机可以通过经典 Büchi 自动机和带有量子特性的终状态加以实现,换句话说通过直接使用经典自动机的有关技术来处理量子 ω-语言,这样可使问题简单化和分明化,从而在理论上变得容易处理,进而使得量子逻辑意义下相关结论得到实质性的加强.

定理 1 设 $A:\Sigma^\omega\longrightarrow\ell$ 为量子ω-语言,以下条件等价.

(1)存在 LVBA $A^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,F)$,使得 $A=\mathrm{rec}_A^\omega$;

(2)存在 LVSBA $A_1^\omega=(Q_1,\Sigma,\eta,S,E)$,使得 $A=\mathrm{rec}_{A_1}^\omega$.

定理 2(代数刻画) 设 $A:\Sigma^\omega\longrightarrow\ell$ 为量子ω-语言,以下论断等价.

(1) $A\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$;

(2) 存在 $a_1,\cdots,a_k\in\ell-\{0\}$,以及 ω-正则语言 $L_1,\cdots,L_k$,使得 $A=\vee_{i=1}^k a_i 1_{L_i}$,其中 1_{L_i}表示 L_i 的特征函数;

(3) 存在 $a_1,\cdots,a_k\in\ell-\{0\}$,以及两两不交的 ω-正则语言 $L_1,\cdots,L_k$,使得 $A=\vee_{i=1}^k a_i 1_{L_i}$.

证明:(1)⇒(3):由于 A 是 Σ 上的量子 ω-正则语言,因此存在 LVBA$A^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,F)$,使得 $A=\mathrm{rec}_A^\omega$,其中 $I\subseteq Q$,表示分明初始状态,$F: Q\longrightarrow\ell$ 表示量子终状态,$\delta: Q\times\Sigma\longrightarrow 2^Q$ 表示分明状态转移函数,即对任意 $\alpha\in\Sigma^\omega$,$A(\alpha)=\ulcorner\mathrm{rec}_A^\omega(\alpha)\urcorner=\vee\{\wedge_{q\in\mathrm{In}(\rho)\cap\mathrm{supp}(F)}F(q):\rho\in R, \mathrm{lb}(\rho)=\alpha, \mathrm{In}(\rho)\cap\mathrm{supp}(F)\neq\varnothing\}$.

令$(\mathrm{Im}(F)_\wedge)_\vee-\{0\}=\{a_1,\cdots,a_k\}\subseteq\ell-\{0\}$,取 $F_i=\{q\in Q: F(q)=a_i\}$.对每个 F_i,构造经典 Büchi 自动机 BA $A_i^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,F_i)$.显然 $L_i=\{\alpha\in\Sigma^\omega:\rho\in R, \mathrm{lb}(\rho)=\alpha, \mathrm{In}(\rho)\cap\mathrm{supp}(F)\neq\varnothing, \ulcorner\mathrm{rec}_A^\omega(\alpha)\urcorner=a_i\}$,其中 L_i 表示经典 Büchi 自动机 A_i^ω 所识别(接受)的分明 ω-正则语言,且$\{L_1,\cdots,L_k\}$两两不交.进一步可知

$\ulcorner\mathrm{rec}_A^\omega(\alpha)\urcorner=\vee\{\wedge_{q\in\mathrm{In}(\rho)\cap\mathrm{supp}(F)}F(q):\rho\in R, \mathrm{lb}(\rho)=\alpha, \mathrm{In}(\rho)\cap\mathrm{supp}(F)\neq\varnothing\}=\vee_{a_i\in\ell-\{0\}}\vee\{\wedge_{q\in\mathrm{In}(\rho)\cap\mathrm{supp}(F)}F(q):\rho\in R, \mathrm{lb}(\rho)=\alpha, \mathrm{In}(\rho)\cap\mathrm{supp}(F)\neq\varnothing\}=\vee_{a_i\in\ell-\{0\}}\{a_i:\rho\in R, \mathrm{lb}(\rho)=\alpha, \mathrm{In}(\rho)\cap\mathrm{supp}(F)\neq\varnothing\}=\vee_{a_i\in\ell-\{0\}}a_i\wedge 1_{L_i}(\alpha)=\vee_{a_i\in\ell-\{0\}}(a_i 1_{L_i})(\alpha)$,综上可知,$A=\ulcorner\mathrm{rec}_A^\omega(\alpha)\urcorner=\vee_{i=1}^k a_i 1_{L_i}$.

(3)⇒(2):显然.

(2)⇒(1):假设 $A=\bigvee_{i=1}^{k}a_i 1_{L_i}$,其中 $L_1,\cdots,L_k\subseteq\Sigma^\omega$ 是分明 Büchi 自动机识别(接受)的 ω-正则语言,令识别 L_i 的 BA 为 $A_i^\omega=(Q_i,\Sigma,E_i,q_{0i},F_i)$,且当 $i\neq j$ 时,$Q_i\cap Q_j=\varnothing$.

构造 LVBA $A^\omega=(Q,\Sigma,\delta,I,F)$如下:

$Q=\bigcup_{i=1}^{k}Q_i$,$I(q_{0i})=a_i$,$F=\bigcup_{i=1}^{k}F_i$,而 $\delta:Q\times\Sigma\times Q\longrightarrow\{0,1\}$为,

$$\delta(p,\sigma,q)=\begin{cases}1, & 若(p,\sigma,q)\in E_i,p,q\in Q_i\\ 0, & 否则.\end{cases},$$

则易证 $A=\lceil \mathrm{rec}_A^\omega(\alpha)\rceil=\bigvee_{i=1}^{k}a_i 1_{L_i}$.

定理 3(层次刻画)　设 $A:\Sigma^\omega\longrightarrow\ell$ 为量子 ω-语言,以下论断等价.

(1) $A\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$;

(2) 集合 $\mathrm{Im}(A)$为有限集,且对任意 $a\in\ell-\{0\}$,A 的 a-截集,$A_a=\{\alpha\in\Sigma^\omega:A(\alpha)\geqslant a\}$是 Σ 上的 ω-正则语言,且 $A=\bigvee_{a\in\ell-\{0\}}a1_{A_a}$,其中 1_{A_a}表示 A_a 的特征函数;

(3) 集合 $\mathrm{Im}(A)$为有限集,且对任意 $a\in\ell-\{0\}$,A 的 a 层集,$A_{[a]}=\{\alpha\in\Sigma^\omega:A(\alpha)=a\}$是 Σ 上的 ω-正则语言,且 $A=\bigvee_{a\in\ell-\{0\}}a1_{A_{[a]}}$,其中 $1_{A_{[a]}}$ 表示 $A_{[a]}$的特征函数.

证明:由定理 2 显然.

以下为了给出量子 ω-正则语言的 Büchi 刻画,先说明量子 ω-正则语言对于正则运算是封闭的.

对任意 $A,B\in\ell(\Sigma^\omega)$,$r\in\ell$,并 $A\vee B$,交 $A\wedge B$,补 $A^\perp$以及数量积 rA 定义为,对任意 $\alpha\in\Sigma^\omega$,$A\vee B(\alpha)=A(\alpha)\vee B(\alpha)$,$\alpha\in\Sigma^\omega$,$A\wedge B(\alpha)=A(\alpha)\wedge B(\alpha)$,$A^\perp(\alpha)=A(\alpha)^\perp$,$rA(\alpha)=r\wedge A(\alpha)$.对任意 $U\in\ell(\Sigma^*)$,$A\in\ell(\Sigma^\omega)$,柯西连接 UA 定义为,对任意 $\alpha\in\Sigma^\omega$,$UA(\alpha)=\bigvee\{U(\alpha_1)\wedge A(\alpha_2):\alpha_1\alpha_2=\alpha,\alpha_1\in\Sigma^*,\alpha_2\in\Sigma^\omega\}$.若 $V\in\ell(\Sigma^*)$,且进一步满足:$\varepsilon\notin\mathrm{supp}(V)$,即不包含空语言,$V$ 的 ω-Kleene 闭包 V^ω定义为,对任意 $\alpha\in\Sigma^\omega$,$V^\omega(\alpha)=\bigvee\{\bigwedge_{i\geqslant 0}V(\alpha_i):\alpha=\alpha_0\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i\cdots,\alpha_i\in\Sigma^*,i\in\omega\}$.

引理 2[9]　设 $U:\Sigma^*\longrightarrow\ell$ 为量子语言,下列条件等价.

(1) $U\in\ell\mathrm{R}(\Sigma)$;

(2) 存在 $a_1,\cdots,a_m\in\ell-\{0\}$,及正则语言 $U_1,\cdots,U_m$,使得 $U=\bigvee_{i=1}^{m}a_i 1_{U_i}$,其中 1_{U_i}表示 U_i 的特征函数;

(3) 存在 $a_1,\cdots,a_m\in\ell-\{0\}$,以及两两不交的正则语言 $U_1,\cdots,U_m$,使得 $u=\bigvee_{i=1}^{m}a_i 1_{U_i}$,其中 1_{U_i}表示 U_i 的特征函数.

命题 5　对量子语言的类 $\ell\mathrm{R}(\Sigma)$与 $\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$,以下结论成立.

(1) 若 $A,B\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$,则 $A\vee B,A\wedge B\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$;

(2) 若 $A,B\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$且 $r\in\ell$,则 $rA,A^\perp\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$;

(3) 若 $U\in\ell\mathrm{R}(\Sigma)$,$A\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$,则 $UA\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$;

(4) 若 $U,V\in\ell\mathrm{R}(\Sigma)$且 $\varepsilon\notin\mathrm{supp}(V)$,则 $UV^\omega\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$.

证明:对任意 $A,B\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$,根据定理 2(3),令 $A=\bigvee_{i=1}^{k}a_i 1_{L_i}$,$B=\bigvee_{j=1}^{n}b_j 1_{M_j}$,其中 L_i 和 M_j 都是经典 ω-正则语言,且$\{L_i\}_{i=1}^{k}$两两不交,$\{M_j\}_{j=1}^{n}$同样两两不交.

(1) 关于并,易知 $A\vee B=\bigvee_{i=1}^{k}a_i 1_{L_i}\vee\bigvee_{j=1}^{n}b_j 1_{M_j}$,因此由定理 2(2)$A\vee B\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$,

关于交,因为 $A\wedge B(\alpha)=A(\alpha)\wedge B(\alpha)=\bigvee_{i=1}^{k}a_i 1_{L_i}(\alpha)\wedge\bigvee_{j=1}^{n}b_j 1_{M_j}(\alpha)=\bigvee_{i=1}^{k}\bigvee_{j=1}^{n}(a_i\wedge b_j)1_{L_i\cap M_j}(\alpha)$,故 $A\wedge B\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$.

(2) 关于数量积,对 $r\in\ell$,易知 $rA=\bigvee_{i=1}^{k}(r\wedge a_i)1_{L_i}$,因此 $rA\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$.

关于补运算,易知 $A^\perp=\bigvee_{i=1}^{k}a_i^\perp 1_{L_i}\vee 1_{\Sigma^\omega-(L_1\cup\cdots\cup L_k)}$,因此由定理 2(2)知 $A^\perp\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$.

(3) 因 $U\in\ell\mathrm{R}(\Sigma)$,由引理 2,令 $U=\bigvee_{i=1}^{m}a_i 1_{U_i}$,其中 U_i 是经典正则语言,且$\{U_i\}_{i=1}^{m}$两两不交.进而易知 $UA(\alpha)=\bigvee\{U(\alpha_1)\wedge A(\alpha_2):\alpha=\alpha_1\alpha_2\}=\bigvee\{\bigvee_{i=1}^{m}a_i 1_{U_i}(\alpha_1)\wedge\bigvee_{j=1}^{n}b_j 1_{M_j}(\alpha_2):\alpha=\alpha_1\alpha_2\}=\bigvee_{i=1}^{m}\bigvee_{j=1}^{n}(a_i\wedge b_j)1_{U_i.M_j}(\alpha)$,因此由定理 2(2)知,$UA\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$.

(4) 类似文献[11]同理可证.

命题 6　设 $h:\Sigma_1^\omega\longrightarrow\Sigma_2^\omega$ 为同态,以下结论成立.

(1) 若 $A\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma_2)$,则 $h^{-1}(A)=A\circ h\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma_1)$;

(2) 设 h 满足,对任意 $\tau\in\Sigma_1$,$h(\tau)\neq\varepsilon$,若 $B\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma_1)$,则 $h(B)\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma_2)$,其中 $h(B)(\alpha)=\bigvee\{B(\nu):h(\nu)=\alpha\}$.

证明:类似于文献[11]同理可证.

定理 4(Büchi 刻画)　设 $A\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$,则存在 $U_i,V_i\in\ell\mathrm{R}(\Sigma)$,其中 $i=1,\cdots,k$,且 $\varepsilon\notin\mathrm{supp}(\nu)$,使得 $A=\bigvee_{i=1}^{k}U_iV_i^\omega$.

证明:对任意 $A\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$,由定理 2(3)知,令 $A=\bigvee_{j=1}^{m}a_j 1_{L_j}$,其中 L_j 是经典 ω-正则语言,且$\{L_j\}_{j=1}^{m}$两两不交.由经典自动机理论,对任意 $L_j\in\Sigma^\omega$,存在 $U_{ij},V_{ij}\in\Sigma^*$,使得 $L_j=\bigcup_{i=1}^{k}U_{ij}V_{ij}^\omega$,这时存在 NFA A_i 和 B_j,使得 $U_{ij}=L(A_i)$,$V_{ij}=L(B_i)$.进而构造 LVSNFA A_i 和 B_j,使得 $\mathrm{rec}_{A_i}=\bigvee_{j=1}^{m}a_j 1_{L_j}$,$\mathrm{rec}_{B_i}=\bigvee_{i=1}^{m}a_i 1_{L_i}$,并令 $U_i=\mathrm{rec}_{A_i}$,$V_i=\mathrm{rec}_{B_i}$,则 $U_i,V_i\in\ell\mathrm{R}(\Sigma)$.易知 $A=\bigvee_{j=1}^{m}a_j 1_{L_j}=\bigvee_{j=1}^{m}a_j 1_{\bigcup_{i=1}^{k}U_{ij}V_{ij}^\omega}=\bigvee_{j=1}^{m}\bigvee_{i=1}^{k}a_j 1_{U_{ij}}\wedge\bigvee_{j=1}^{m}\bigvee_{i=1}^{k}a_j 1_{V_{ij}^\omega}=\bigvee_{i=1}^{k}U_iV_i^\omega$.

4 单体二阶量子逻辑以及它可定义的语言

限于篇幅,有关单体二阶逻辑的基本知识和相关逻辑符号请参见文献[14~18].

定义 5 字母表 Σ 上的 LVMSO 逻辑公式的语构用如下的 BNF 形式定义:

$\varphi ::= r \mid P_\sigma(x) \mid x \leqslant y \mid x \in X \mid \varphi \vee \psi \mid \neg \varphi \mid \exists x.\varphi \mid \exists X.\varphi$,

其中,$r \in \ell$,$\sigma \in \Sigma$,x,y 为一阶变量,而 X 为二阶集合变量.

由此可诱导如下公式:

$\varphi \wedge \psi = (\neg \varphi \vee \neg \psi)$. $\varphi \to \psi = \neg \varphi \vee (\varphi \wedge \psi)$(称为 Sasaki 蕴涵). $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

$\forall x.\varphi = \neg(\exists x.\neg \varphi)$. $\forall X.\varphi = \neg(\exists X.\neg \varphi)$.

以下用 $\mathrm{Free}(\varphi)$ 表示公式 φ 中出现的全体自由变量,用 $\mathrm{LVMSO}(\Sigma)$ 表示 Σ 上的所有 LVMSO 公式之集.

定义 6 设 $\varphi \in \mathrm{LVMSO}(\Sigma)$,$V$ 为有限变量集且 $\mathrm{Free}(\varphi) \subseteq V$,则 φ 的 V-语义定义为 Σ_V 上的 ℓ 值语言 $\lceil \varphi \rceil_V : \Sigma_V^\omega \longrightarrow \ell$,对任意 $(\alpha,f) \in \Sigma_V^\omega$,当 f 不是有效的 (V,α) 指派,则 $\lceil \varphi \rceil_V(\alpha,f) = 0$,否则,$\lceil \varphi \rceil_V$ 归纳地定义如下:

$\lceil r \rceil_V(\alpha,f) = r$,

$$\lceil P_\sigma(x) \rceil_V(\alpha,f) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \alpha(f(x)) = \sigma, \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

$$\lceil x \leqslant y \rceil_V(\alpha,f) = \begin{cases} 1, & \text{若 } f(x) \leqslant f(y), \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

$$\lceil x \in X \rceil_V(\alpha,f) = \begin{cases} 1, & \text{若 } f(x) \in f(X), \\ 0, & \text{否则}. \end{cases}$$

$\lceil \neg \varphi \rceil_V(\alpha,f) = \lceil \varphi \rceil_V(\alpha,f)^\perp$.

$\lceil \varphi \vee \psi \rceil_V(\alpha,f) = \lceil \varphi \rceil_V(\alpha,f) \vee \lceil \psi \rceil_V(\alpha,f)$

$\lceil \exists x.\varphi \rceil_V(\alpha,f) = \vee \{ \lceil \varphi \rceil_{V \cup \{x\}}(\alpha, f[x \to i]) : i \in \omega \}$.

$\lceil \exists X.\varphi \rceil_V(\alpha,f) = \vee \{ \lceil \varphi \rceil_{V \cup \{X\}}(\alpha, f[X \to I]) : I \subseteq \omega \}$.

记 $\lceil \varphi \rceil = \lceil \varphi \rceil_{\mathrm{Free}(\varphi)}$. 注意到,若 φ 为句子,则 φ 无自由变量,且 $\lceil \varphi \rceil$ 为 Σ 上的量子 ω-语言.

命题 7 设 $\varphi \in \mathrm{LVMSO}(\Sigma)$,$\mathrm{Free}(\varphi) \subseteq V$,则 $\lceil \varphi \rceil_V(\alpha,f) = \lceil \varphi \rceil(\alpha, f|_{\mathrm{Free}(\varphi)})$.

特别地,$\lceil \varphi \rceil$ 为量子 ω-语言 $\Leftrightarrow \lceil \varphi \rceil_V$ 为量子 ω-正则语言.

证明:只需对公式 φ 中出现的连接词与量词的个数施行归纳即可.

5 量子 Büchi 自动机的单体二阶量子逻辑描述

命题 8 设 A^ω 是 Σ 上的任一 LVBA,则存在 $\xi \in \mathrm{LVMSO}(\Sigma)$,使得 $\mathrm{rec}_A^\omega = \lceil \xi \rceil$.

证明:设 LVBA $A^\omega = (Q,\Sigma,\delta,I,F)$,且 $\mathrm{rec}_A^\omega = A$. 令 $T = Q \times \Sigma \times Q$,对 $(p,\sigma,q) \in T$,取集合变量 $X_{p,\sigma,q}$,并令 $V = \{X_{p,\sigma,q} : (p,\sigma,q) \in T\}$,设 $|V| = m = |Q|^2 \cdot |\Sigma|$,其中 $|Q|,|V|,|\Sigma|$ 分别表示集合 Q,V,Σ 中元素个数,同时令 $\widetilde{X} = (X_1,\cdots,X_m)$,定义公式 φ 如下:

$$\varphi(\widetilde{X}) = \mathrm{Partition}(\widetilde{X}) \wedge \bigwedge_{(p,\sigma,q)\in T} \forall x.((x \in X_{p,\sigma,q}) \to P_\sigma(x)) \wedge \forall x.\forall y.(S(x,y) \to \bigvee_{p,q,r \in Q,\sigma,\zeta \in \Sigma} (x \in X_{p,\sigma,q}) \wedge (y \in X_{q,\zeta,r}))$$,

其中,$\mathrm{Partition}(\widetilde{X}) = \forall x.\bigwedge_{i=1}^{m}((x \in X_i) \wedge \bigwedge_{j \neq i} \neg(x \in X_j))$,

$S(x,y) = ((x \leqslant y) \wedge \neg(y \leqslant x) \wedge \forall z.(z \leqslant x \vee y \leqslant z))$,即公式 $S(x,y)$ 表示 x 的后继 $x+1$,有时亦记为 $y = x+1$.

对 $\alpha = \sigma_0\sigma_1\sigma_2\cdots \in \Sigma^\omega$,令 $\mathrm{Assign}(V,\alpha) = \{f : \lceil \varphi \rceil(\alpha,f) = 1\}$ 表示所有满足公式 φ 的 (V,α) 指派(即 $\lceil \varphi \rceil(\alpha,f) = 1$)集合,而 $R_\alpha = \{\rho_\alpha : \mathrm{lb}(\rho) = \alpha\}$ 表示所有标记为 α 的路径集合. 易知存在从集合 $\mathrm{Assign}(V,\alpha)$ 到集合 R_α 的一一映射.

定义公式 ψ 如下:

$$\psi(\widetilde{X}) = \varphi(\widetilde{X}) \wedge (\forall x.\bigwedge_{(p,\sigma,q)\in T}((x \in X_{p,\sigma,q}) \to \delta(p,\sigma,q))) \wedge (\exists y.(\mathrm{Initial}(y) \wedge \bigvee_{(p,\sigma,q)\in T}((y \in X_{p,\sigma,q}) \wedge I(p)))) \wedge (\bigvee_{(p,\sigma,q)\in T, p \in F} \forall x.\exists y.(x < y \wedge (y \in X_{p,\sigma,q} \wedge F(p))))$$,;

其中 $\mathrm{Initial}(y) = \forall x.y \leqslant x$. 直观上,公式 $\bigvee_{(p,\sigma,q)\in T, p \in F} \forall x.\exists y$ 从语义方面来说是用来判定 LVBA A^ω 在输入 $\alpha \in \Sigma^\omega$ 下的每一条路径 ρ_α 是否有效,其取值域为 ℓ.

这时,若 $\rho_\alpha = \rho(0)\rho(1)\rho(2)\cdots = (\rho(i))_{i \geqslant 0}$ 为 A^ω 上的一条以 α 为标记的路径,而 f_{ρ_α} 为对应的 (V,α) 指派. 另外,对任意 $t \in T$,令 $\rho_\alpha(t) = \{i : \rho(i) = t\}$. 若 ρ_α 不是有效路径,由公式 $\bigvee_{(p,\sigma,q)\in T, p \in F} \forall x.\exists y$ 的定义知,$\lceil \varphi \rceil_V(\alpha, f_{\rho_\alpha}) = 0$. 否则,$\rho_\alpha$ 是有效路径,即 $\mathrm{In}(\rho_\alpha) \cap \mathrm{supp}(F) \neq \varnothing$,进一步可知,$\lceil \psi \rceil_V(\alpha, f_{\rho_\alpha}) = I(q_0) \wedge \bigwedge_{i \geqslant 0} \delta(q_i,\sigma_i,q_{i+1}) \wedge \bigwedge_{q \in \mathrm{In}(\rho) \cap \mathrm{supp}(F)} F(q)$.

进而,若令 $\xi = \exists X_1 \cdots \exists X_m.\psi(X_1,\cdots,X_m)$,对任意 $\alpha = \sigma_0\sigma_1\sigma_2\cdots \in \Sigma^\omega$,则有 $\lceil \xi \rceil(\alpha) = \bigvee_{f \in \mathrm{Assign}(V,\alpha)} \lceil \psi \rceil_V(\alpha,f) = \bigvee_{\rho_\alpha \in R_\alpha} \lceil \psi \rceil_V(\alpha, f_{\rho_\alpha}) = \bigvee_{\mathrm{In}(\rho_\alpha) \cap \mathrm{supp}(F) \neq \varnothing} (I(q_0) \wedge \bigwedge_{i \geqslant 0} \delta(q_i,\sigma_i,q_{i+1}) \wedge \bigwedge_{q \in \mathrm{In}(\rho_\alpha) \cap \mathrm{supp}(F)} F(q)) = \vee \{ I(b(\rho_\alpha)) \wedge \lceil \mathrm{path}_A^\omega(\rho_\alpha) \rceil \wedge \bigwedge_{q \in \mathrm{In}(\rho_\alpha) \cap \mathrm{supp}(F)} F(q) : \rho_\alpha \in R_\alpha, \mathrm{lb}(\rho_\alpha) = \alpha, \mathrm{In}(\rho_\alpha) \cap \mathrm{supp}(F) \neq \varnothing \} = \lceil \mathrm{rec}_A^\omega(\alpha) \rceil$.

综上所述,可知 $A = \mathrm{rec}_A^\omega = \lceil \xi \rceil$,因此结论成立.

引理 3 若 $\psi \in \mathrm{LVMSO}(\Sigma)$ 为原子的,则 $\lceil \psi \rceil \in \ell\mathrm{BR}(\Sigma)$.

证明:若 $\psi = a \in \ell$,构造 LVBA $A^\omega = (Q,\Sigma,\delta,I,F)$

如下，$Q=\{q\}$，对任意 $\sigma\in\Sigma$，令 $\delta(q,\sigma,q)=1$，$I=\{q\}$，$F(q)=a$. 显然有$\lceil\psi\rceil=\mathrm{rec}_A^{\omega}=a1_{\Sigma^{\omega}}$，

对于 $\psi=P_{\sigma}(x)\mid x\leqslant y\mid x\in X$ 的情形，首先，明显地 ψ 是经典 MSO 公式，经典构造即可，具体参见文献[14~18]，这时 ψ 能被经典 Büchi 自动机 $A_1^{\omega}=\{Q,\Sigma,\delta_1,I_1,F_1\}$所识别；其次，再将 A_1^{ω} 转化为 LVBA $A^{\omega}=(Q,\Sigma,\delta,I,F)$如下，$Q,\Sigma$ 与A_1^{ω} 相同，若 $q\in I_1$，则令 $I(q)=1$，同理若 $q\in F_1$，则令 $F(q)=1$，另外对任意 $\sigma\in\Sigma,p,q\in Q$，若$(q,\sigma,p)\in\delta_1$，则令 $\delta(q,\sigma,p)=1$，显然 FBA A^{ω} 能识别$\lceil\psi\rceil$.

引理 4　若 $\varphi,\psi\in$ LVMSO(Σ)，且$\lceil\varphi\rceil,\lceil\psi\rceil\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$，则$\lceil\neg\varphi\rceil,\lceil\varphi\vee\psi\rceil,\lceil\varphi\wedge\psi\rceil,\lceil\varphi\rightarrow\psi\rceil\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$.

证明：由于$\lceil\varphi\wedge\psi\rceil=\lceil\varphi\rceil\wedge\lceil\psi\rceil$，$\lceil\varphi\rightarrow\psi\rceil=\lceil\varphi\rceil\rightarrow\lceil\psi\rceil$，$\lceil\neg\varphi\rceil=\lceil\varphi\rceil^{\perp}$，$\lceil\varphi\vee\psi\rceil=\lceil\varphi\rceil\vee\lceil\psi\rceil$，由命题 5 知结论成立.

引理 5　设 $h:\Sigma_1\rightarrow\Sigma_2^*$ 为任意映射，且满足，对任意 $\sigma\in\Sigma_1$，$h(\sigma)\neq\varepsilon$，则对任意的 $A^{\omega}\in\Lambda^{\omega}(\Sigma)$，$\theta\in\Sigma_2^{\omega}$，$\models^{\ell}\mathrm{rec}_{h(A)}^{\omega}(\theta)\leftrightarrow(\exists\alpha\in\Sigma_1^{\omega}.\,h(\alpha)=\theta)\mathrm{rec}_A^{\omega}(\alpha)$，即 $\mathrm{rec}_{h(A)}^{\omega}=h(\mathrm{rec}_A^{\omega})$.

证明：由命题 6 显然.

引理 6　若 $\psi\in$ LVMSO(Σ)，且$\lceil\psi\rceil\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$，则$\lceil\exists x.\psi\rceil,\lceil\exists X.\psi\rceil\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$.

证明：令 $V=\mathrm{Free}(\exists x.\psi)$，则 $x\notin V$. 进而令 $\pi:\Sigma_{V\cup\{x\}}^{\omega}\longrightarrow\Sigma_V^{\omega}$ 为抹去 x 行元素的同态，即对任意 $\sigma\in\Sigma$，$U\subseteq V\cup\{x\}$，$\pi(\sigma,U)=(\sigma,U-\{x\})$，则明显地 $\pi(\sigma,U)\neq\varepsilon$. 对$(\alpha,f)\in\Sigma_V^{\omega}$，$f$ 为有效的(V,α)指派当且仅当对任意 $i\in\omega$，$f[x\rightarrow i]$为有效的$(V\cup\{x\},\alpha)$指派.

因此，对任意$(\alpha,f)\in N_V$，$\lceil\exists x.\psi\rceil_V(\alpha,f)=\bigvee_{i\geqslant 0}\lceil\psi\rceil_{V\cup\{x\}}(\alpha,f[x\rightarrow i])=\pi(\lceil\psi\rceil_{V\cup\{x\}})(\alpha,f)$.

此处最后一个等式成立是由于 f_1 为有效的$(V\cup\{x\},\alpha)$指派且 $\pi(\alpha,f_1)=(\alpha,f)$当且仅当存在 $i\in\omega$ 使得$f_1=f[x\rightarrow i]$. 进而由命题 7 以及 $\mathrm{Free}(\psi)\subseteq V\cup\{x\}$，可知$\lceil\psi\rceil_{V\cup\{x\}}$是量子 ω-正则语言，进而由量子 ω-正则语言在投射同态下保持，且由引理 5 和命题 6 知$\lceil\exists x.\psi\rceil\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$. 对于$\lceil\exists X.\psi\rceil\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$的情形，只需将一阶变量 x 换为二阶变量 X，同理可证.

命题 9　设 $\xi\in$ LVMSO(Σ)，则存在 LVBA A^{ω}，使得 $\mathrm{rec}_A^{\omega}=\lceil\xi\rceil$.

证明：由引理 3~引理 6 显然.

定理 5(Büchi 定理)　$A\in\ell\mathrm{BR}(\Sigma)$当且仅当存在 $\xi\in$ LVMSO(Σ)，使得 $A=\lceil\xi\rceil$.

命题 10　以上构造 LVBA 的过程是可判定的.

证明：显然.

6　结论

本文采用语义分析方法，给出量子逻辑意义下的非终止进程或数据处理(比如多用户操作系统，银行系统，航空控制系统和网络传播系统等)的数学模型，并对该模型的代数性质和逻辑性质进行了研究. 研究结论表明，量子 Büchi 自动机相对于经典 Büchi 自动机而言，一方面，它们所依赖逻辑不同，一个是量子逻辑，一个是经典逻辑，因而所得结论既有相似的地方，又有本质的不同. 比如：在经典 Büchi 自动机理论中，ω-正则语言对于交运算、补运算、柯西连接运算、同态和 ω-Kleene 闭包运算仍然是封闭的，但是这些结论对于量子 ω-正则语言不再成立. 另一方面，由于分配律对于某些结论是充分而非必要的条件，通过直接使用经典自动机的有关技术来处理量子 ω-正则语言，使得相关问题简单化和分明化，进而使量子逻辑意义下相关结论得到实质性的加强，从而所得结论有许多类似的地方，特别地，当 $\ell=\{0,1\}$时，对应的逻辑为经典逻辑，量子状态构造方法退化为经典子集构造，因此量子 Büchi 自动机和经典 Büchi 自动机具有紧密联系和本质区别. 与此同时为了揭示量子 Büchi 自动机的逻辑基础，通过引入单体二阶量子逻辑的概念，给出量子 Büchi 自动机识别的量子 ω-正则语言的单体二阶量子逻辑描述，初步建立了量子 Büchi 自动机和量子逻辑之间的联系，但是由于正交模格代数结构本身的复杂性，这种联系的唯一性和完备性还需要进一步探讨，同时研究基于量子逻辑的模型检测方法，将本文得到的相关代数刻画应用到量子模型检测技术中，另外量子 Büchi 自动机在量子程序中的应用以及在量子信息技术，尤其是在量子通信中的可能应用还需在另文中予以研究.

参考文献

[1] Gruska J, Quantum Computing[M]. London: McGraw-Hill, 1999.

[2] Nielsen MA, Chuang IL. Quantum Computation and Quantum Information[M]. Cambridge: Cambridge University, 2004.

[3] Zhong ShuQin, MA Zhi, XU YaJie, Constructing quantum error correcting code via logic function[J]. Science China Information Sciences, 2010, 53(3): 515 – 523.

[4] Cao HuaiXin, LI Li, Chen ZhengLi, Zhang Ye, Guo ZhiHua. Restricted allowable generalized quantum gates[J]. Chinese Science Bulletin, 2010, 55 (20): 2122 – 2125.

[5] Barenco A, Bennett CH, Cleve R. Elementary gates for quantum computation[J]. Physical Review A, 1995, 52(5): 3457 – 3467.

[6] Liu Y, Long GL, Sun Y. Analytic one-bit and CNOT gate constructions of general n-qubit controlled gates[J]. International

Journal of Quantum Information,2008,6(3):447 – 462.

[7] Ying Mingsheng. A theory of computation based on quantum logic(I)[J]. Theoretical Computer Science,2005,344(2 – 3):134 – 207.

[8] Ying Mingsheng. Quantum logic and automata theory[A]. Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures[C]. Amsterdam:Elsevier,2007.619 – 754.

[9] 李永明.基于量子逻辑的有穷自动机与单体二阶量子逻辑[J].中国科学 F 辑:信息科学,2009,39(11):1135 – 1145.

[10] 韩召伟,李永明.基于量子逻辑的下推自动机与上下文无关文法[J].软件学报,2010,21(9):2107 – 2117.
Han Zhaowei,Li Yongming. Pushdown automata and context-free grammars based on quantum logic[J]. Journal of Software,2010,21(9):2107 – 2117.(in Chinese)

[11] 韩召伟.量子无穷正则语言的代数性质[J].陕西师范大学学报(自然科学版),2012,40(5):9 – 13.
Han Zhaowei. Algebraic properties of quantum infinite languages[J]. Journal of Shaanxi Normal University(Natural Science Edition),2012,40(5):9 – 13.(in Chinese)

[12] Clarke EM,Grumberg O,Peled DA. Model Checking[M]. Cambridge:MIT Press,2000.

[13] Baier C,Katoen JP. Principles of Model Checking[M]. Massachusetts:The MIT Press,2008.

[14] Khoussainov B,Nerode A. Automata Theory and Its Applications[M]. Boston:Birkäuser,2001.

[15] Thomas W. Languages,automata and logic[A]. Handbook of Formal Languages[C]. Berlin,Heidelberg:Springer Verlag,1997.389 – 485.

[16] Thomas W. Automata on infinite objects[A]. Handbook of Theoretical Computer Science[C]. Amsterdam:Elsevier,1990.133 – 191.

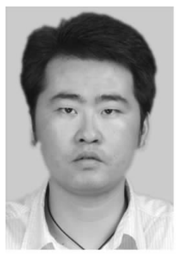
[17] Farwer B. ω-automata[A]. Automata,Logics,and Infinite Games,LNCS 2500[C]. Berlin,Heidelberg:Springer-Verlag,2002.3 – 21.

[18] Perrin D,Pin JÉ. Infinite Words[M]. Amsterdam:Elsevier,2004.

[19] Kalmbach G. Orthomodular Lattices[M]. London:Academic Press,1983.

[20] Li Yongming,Li Zhihui. Free semilattices and strongly free semilattices generated by partially ordered sets[J]. Northeastern Mathematical Journal,1993,9(3):359 – 366.

作者简介



韩召伟 男,博士,1981 年 1 月生于陕西西安,现为陕西师范大学数学与信息科学学院讲师,主要研究方向为计算机软件与理论、量子计算与量子逻辑.

E-mail:hanzw888@snnu.edu.cn